РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ (ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА, ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ)*

А. Г. Хованский

Настоящая статья является расширенным изложением моих лекций, прочитаннах .. октября 1994 на заседании Московского Математического Общества и 20 октября 1994 года в Московском Независимом Университете для студентов Ecole Normale Superieure. В ней рассказывается о разрешимости и о неразрешимости уравнений в конечном виде. Известно три подхода к решению этой задачи. Первый подход восходит к Лиувиллю. Во втором подходе задача рассматривается с точки зрения теории Галуа. Он связан с именами Пикара, Вессио, Колчина и др. Третий, топологический, подход был построен в моей кандидатской диссертации. Пользуюсь случаем поблагодарить моего научного руководителя В.И. Арнольда. Я признателен также Т.В. Белокриницкой за помощь при подготовке статьи к печати.

§1 Разрешимость уравнений в конечном виде

Некоторые дифференциальные уравнения "решаются явно". Что это значит? Если решение предъявлено, оно само и дает ответ на этот вопрос. Обычно все же попытки явного решения уравнений оказываются безуспешными. Возникает желание доказать, что для тех или иных уравнений явных решений не существует. Тут уже просто необходимо точно определить, о чем идет речь (иначе непонятно, что, собственно, мы собираемся доказать). Это можно сделать следующим образом: выделить тот или иной класс функций и сказать, что уравнение решается явно, если его решение принадлежит этому классу. Разные классы функций соответствуют разным понятиям разрешимости. Класс функций можно выделить, задав список *основных функций* и список *допустимых операций*.

После этого класс функций определяется как множество всех функций, которые получаются из основных функций при помощи применения допустимых операций. Перечислим классические примеры.

*Работа выполнена во время визита в Ekole Normale Superieure при частичной поддержке гранта NNN Российского Фонда Фундаментальных исследований и Канадского Гранта NNN. Я признателен французским коллегам за гостеприимство.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Пример 1. Класс функций, *представимых в радикалах.*

Список допустимых функций: константы, независимая переменная x.

Список допустимых операций: арифметические операции (сложение, умножеие, деление) и опреации взятия радикалов $\sqrt[n]{f}$, $n = 2, 3, \ldots$ из заданной функции f.

Функция $g(x) = \sqrt[3]{5x + 2\sqrt[2]{x}} + \sqrt[7]{x^3 + 3}$ доставляет пример функций, представимых в радикалах.

С этим классом связана знаменитая задача о разрешимости уравнений в радикалах. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1(x)y^{n-1} + \cdots + r_n(x) = 0, \tag{1}$$

в котором $r_i(x)$ — рациональные функции одной переменной. Полный ответ на вопрос о разрешимости уравнения (1) в радикалах дает теория Галуа (см. §8).

Отметим, что уже в простейшем примере 1 мы встречаемся с неприятностью: функции, с которыми мы имеем дело, многозначны. Уточним, например, что такое сумма двух многозначных функций $f(x)$ и $g(x)$. Возьмем произвольную точку a, один из ростков f_a аналитической функции $f(x)$ в точке a и один из ростков g_a аналитической функции $g(x)$ в той же точке a. Будем говорить, что функция $\varphi(x)$, порожденная ростком $f_a + g_a$, представима в виде суммы функций $f(x)$ и $g(x)$. Это определение неоднозначно. Например, легко видеть, что ровно две функции представляются в виде $\sqrt{x} + \sqrt{x}$, это $f_1 = 2\sqrt{x}$ и $f_2 \equiv 0$. Замкнутость какого-либо класса многозначных функций относительно сложения означает, что этот класс вместе с любыми двумя функциями содержит все функции, представимые в виде их суммы.

То же самое нужно сказать и про все другие операции над многозначными функциями, которые встречаются как в приведенном определении, так и на протяжении всей статьи.

Пример 2. *Элементарные функции.* Основные элементарные функции — это те функции, которые мы проходим в школе и которые обычно вносятся в клавиатуры калькуляторов. Вот их список: константы, независимая переменная x, радикалы $\sqrt[n]{x}$, экспонента $\exp x$, логарифм $\ln x$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$. Допустимые операции: арифметические операции, суперпозиции.

Элементарные функции записываются формулами, например, следующей

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\exp(\sin x) + \cos x).$$

Когда мы начинаем учить анализ, нас учат интегрировать элементарные функтсии, и это оказывается далеко не простым занятием. Как доказал Лиувилль, неопределенный интеграл от элементарной функции обычно не является элементарной функцией.

Пример 3. *Функции, представимые в квадратурах.* Основные функции в этом классе — это основные элементарные функции. Допустимые операции — арифметические операции, суперпозиция и интегрирование. (Класс функций называется *замкнутым относительно интегрирования*, если с каждой функцией f содержит функцию g такую, что $g' = f$.)

Например, функция

$$\exp\left(\int^x \frac{\mathrm{d}\,x}{\ln x}\right)$$

представима в квадратурах. Но, как доказал Лиувилль, эта функция не является элементарной.

Примеры 2 и 3 имеют модификацию. Скажем, что класс функций замкнут относительно решения алгебраических уравнений, если с каждыми функциями $f_1, \ldots, f_n$ он содержит функцию y, удовлетвотяющую алгебраическому уравнению

$$y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n = 0.$$

Пример 4. Если в определение класса элементарных функций добавить операцию решения алгебраических уравнений, то получится определение класса *обобщенных элементарных функций.*

Пример 5. Функции, представимые в *обобщенных квадратурах*, — это класс функций, получаемый из класса функций, представимых в квадратурах, добавлением операции решения алгебраических уравнений.

§2 Теория Лиувилля

Первые строгие доказательства неразрешимости некоторых уравнений в квадратурах и в элементарных функциях были получены в середине прошлого века Лиувиллем. Здесь мы очень кратко обсудим его результаты.

Изложение метода Лиувилля и близких работ Чебышева, Мордухай-Болтовского, Островского и Ритта можно найти в книге [1].

Прежде всего Лиувилль показал, что классы функций из примеров 2–5 можно построить значительно проще. Бросается в глаза громоздкость списка основных элементарных функций. Кроме того в определениях участвует неприятная с алгебраической точки зрения операция суперпозиции. Лиувилль, во-первых, показал, что можно значительно упростить списки основных функций, в половине случаев оставив в них лишь константы, а во второй половине — лишь константы и независимую переменную. Во-вторых, он показал, что в списках допустимых операций операция суперпозиции лишняя. Определения всех необходимых операций можно дать, используя лишь арифметические опрации и дифференцирование. Этот факт играет ключевую роль для алгебраизации задачи — перечисленные операции есть в дифференциальных полях. Приведем соответствующие определения из дифференциальной алгебры.

Поле функций F называется *дифференциальным полем*, если оно замкнуто относительно дифференцирования, т.е. если из $g \in F$ вытекает, что $g' \in F$. Можно рассматривать и абстрактные дифференциальные поля, т.е. поля, в которых определена дополнительная линейная операция дифференцирования, удовлетворяющая тождеству Лейбница $(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$.

Пусть есть дифференциальное поле F_0, лежащее в большем дифференциальном поле F, $F_0 \subseteq F$. Элемент $y \in F$ называется *алгебраическим* над полем F_0, если y удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

с коэффициентами a_i из поля F_0. В частности, элемент y называется *радикалом* над полем F_0, если $y^k \in F_0$. Элемент y называется *интегралом* над полем F_0, если $y' \in F_0$. Элемент y называется логарифмом над полем F_0, если $y' = a'/a$, где $a \in F_0$. Элемент y называется *экспонентой интеграла* над полем F_0, если $y' = ay$, $a \in F_0$. Элемент y называется экспонентой над полем F_0, если $y' = a'y$. *Расширением поля* F_0 при помощи элемента y называется наименьшее дифференциальное поле $F_0\{y\}$, содержащее F_0 и y. Поле $F_0\{y\}$ состоит из рациональных функций от $y, y', \ldots, y^{(k)}, \ldots$ с коэффициентами в поле F_0.

1) Элемент y называется *представимым в радикалах над полем* F_0, если существует цепочка расширений $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_k$, такая, что каждое расширение $F_i \subseteq F_{i+1}$ есть присоединение радикала над полем F_i, и поле $F\{y\}$ содержится в поле F_k.

По такой же схеме определяются и другие виды представимости элемента y над полем F_0. В виде "строительных кирпичиков" в этих определениях используются другие виды расширения $F_i \subseteq F_{i+1}$.

2) *Элементарный элемент* y над полем F_0. Здесь допускается присоединение логарифмов и экспонент.
3) Элемент y *представим в квадратурах над полем* F_0. Здесь допускается присоединение интегралов и экспонент интегралов.
4) *Обобщенный элементарный элемент* y *над полем* F_0. Здесь допускается присоединение алгебраических элементов, экспонент и логарифмов.
5) Элемент y *представим в обобщенных квадратурах над полем* F_0. Здесь допускается присоединение алгебраических элементов, интегралов, экспонент интегралов.

Справедлива следующая

Теорема 1 (Лиувилль). *Функция y является элементарной (обобщенной элементарной), если и только если она является элементарной (обобщенной элементарной) над полем рациональных функций $\mathcal{R}$. Функция y является представимой в квадратурах (представимой в обобщенных квадратурах), если и только если она является представимой в квадратурах (представимой в обобщенных квадратурах) над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.*

Например, из теоремы 1 вытекает, что основная элементарная функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ представима в квадратурах над полем $F_0 = \mathbb{C}$. Действительно, это видно из

обращения равенств $f' \equiv \dfrac{1}{1+x^2}$, $x' \equiv 1$. Для доказательства, например, той части теоремы 1, которая относится к функциям, представимым в квадратурах, достаточно проверить, что, во-первых, для всех основных элементарных функций имеется аналогичное представление, и, во-вторых, что класс функций, представимых в квадратурах над полем $\mathbb{C}$ замкнут относительно суперпозиций.

Лиувилль построил красивую теорию разрешимости уравнений. Приведем два примера его результатов.

Теорема 2 (Лиувилль). *Неопределенный интеграл $y(x)$ от алгебраической функции $A(x)$ берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он представим в виде*

$$y(x) = \int^x A(x)\mathrm{d}\,x = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln A_i(x),$$

где $A_i(x)$ при $i = 0, 1 \ldots, k$ — алгебраическая функтаия.

Априори интеграл алгебраической функции мог бы задаваться очень сложной формулой. Сажем, он мог бы иметь вид

$$y = \exp(\exp(\exp(\exp(\exp(x))))).$$

Теорема 2 показывает, что ничего такого случиться не может. Или интеграл алгебраической функции имеет описанный простой вид, или вообще не является обобщенной элементарной функцией.

Теореме 3 (Лиувилль). *Линейное дифференциальное уравнение*

$$(*) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — рациональные функции, решается в обобщенных квадратурах, если и только если одно из его решений представимо в виде

$$y = \exp(\int^x R(x)\mathrm{d}\,x),$$

где $R(x)$ — алгебраическая функция.

Априори у уравнения $(*)$ могли бы существовать решения, определенные очень сложными формулами. Теорема 3 показывает, что ничего такого случиться не может. Или уравнение имеет достаточно простые решения, или вообще не задается в обобшенных квадратурах.

Лиувилль получил целый ряд результатов такого рода. Общая идеология их такая же: простые уравнения либо имеют достаточно простые решения, либо вообще не решаются в заданном классе (в квадратурах, в элементарных функциях и т.д.)

Стратегия доказательств в теории Лиувилля следующая: показывается, что если простое уравнение имеет решение, записанное сложной формулой, то, на самом деле, эту формулу можно упростить.

Лиувилль, несомненно, был вдохновлен результатами Лагранжа, Абеля и Галуа о неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах. В отличии от теории Галуа в теории Лиувилля понятие группы автоморфизмов не фигурирует. Хотя на самом деле Лиувилль упрощает формулы именно при помощи "бесконечно малых автоморфизмов".

§3 Теория Пикара-Вессио

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + r_n(x)y = 0, \tag{1}$$

в котором $r_i(x)$ — рациональные функции комплексного переменного.

В окрестности неособой точки x_0 существует n линейно незалисимых решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (1). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, полученное присоединением к полю рациональных функций $\mathcal{R}$ всех решений y_i и всех их производных $y_i^{(p)}$ до порядка $(n-1)$. (Производные большего порядка находятся из уравнения (1).)

Поле функций $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ является дифференциальным полем, т.е оно замкнуто относительно дифференцирования также, как и поле рациональных функций $\mathcal{R}$. Автоморфизмом дифференциального поля F называется автоморфизм σ поля F, сохраняющий операцию дифференцирования, т.е. $\sigma(g') = [\sigma(g)]'$. Рассмотрим автоморфизм σ дифференциального поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, который оставляет неподвижными все элементы поля $\mathcal{R}$. Совокупность всех таких автоморфизмов образует группу, которая называется *группой Галуа* уравнения (1). Каждый автоморфизм σ из группы Галуа переводит решение уравнения в решение уравнения, поэтому ему отвечает линейное преобразование M_σ пространства решений V^n. Автоморфизм σ вполне определяется преобразованием M_σ, так как поле $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ порождается функциями y_i. Вообще говоря, не каждое линейное преобразование пространства V^n может быть продолжено до автоморфизма σ из группы Галуа. Дело в том, что автоморфизмы σ обязаны сохранять все дифференциальные соотношения, существующие между решениями. Группу Галуа можно рассматривать как некоторую группу линейных преобразований решений. Эта группа оказывается алгебраической.

Итак, группа Галуа уравнения — это алгебраическая группа линейных преобразований пространства решений, сохраняющих все дифференциальные соотношения между компонентами решений.

Пикар начал систематически переносить теорию Галуа на случай линейных дифференциальных уравнений. Как и в обычной теории Галуа здесь существует взаимнооднозначное *соответствие Галуа* между промежуточными дифференциальными полями и алгебраическими подгруппами группы Галуа

Пикар и Вессио показали в 1910 году, что за разрешимость уравнения в квадратурах и в обобщенных квадратурах отвечает только его группа Галуа.

Теорема Пикара-Вессио. *Для разрешимости дифференциального уравнения в квадратурах необходимо и достаточно, чтобы группа Галуа была разрешима. Для разрешимости дифференциального уравнения в обобщенных квадратурах необходимо и достаточно, чтобы компонента связности единицы в группе Галуа была разрешима*

Основные результаты дифференциальной теории Галуа можно найти в книге [2]. В [3] дается краткий обзор современного состояния предмета и приводится довольно обширная библиография.

Отметим, что из теоремы Пикара-Вессио не сложно вывести, что если уравнение (1) решается в обобщенных квадратурах, то у него есть решение $y_1 = \exp(\int^x A_1(x), \mathrm{d}\,x)$, где $A_1(x)$ — алгебраическая функция. Если уравнение имеет явное решение y_1, то его порядок можно понизить, введя новую неизвестную функтсию $z = (y/y_1)'$. Функция z удовлетворяет явно выписываемому линейному дифференциальному уравнению меньшего порядка. Если исходное уравнение было разрешимым, то уравнение для функции z тоже должно быть разрешимым. Поэтому оно по теореме Пикара-Вессио должно иметь решение вида $z_1 = \exp \int A_2(x)\mathrm{d}\,x$, где $A_2(x)$ — алгебраическая функция и т.д. Итак, мы видим, что если линейное уравнение решается в обобщенных квадратурах, то оно имеет решения, задаваемые не слишком сложными формулами. Здесь подход Пикара-Вессио смыкается с подходом Лиувилля. Более того, критерий разрешимости уравнения в обобщенных квадратурах можно сформулировать, не упоминая о группе Галуа. Именно. Уравнение (1) порядка n решается в обобщенных квадратурах, если и только если оно имеет решение вида $y_1 = \exp \int^x A(x)\mathrm{d}\,x$ и уравнение порядка $(n-1)$ для функции z решается в обобщенных квадратурах.

Именно в таком виде эта теорема была найдена и доказана Мордухай-Болтовским. Мордухай-Болтовский получил этот результат в том же 1910 году методом Лиувилля, независимо от работ Пикара и Вессио. Теорема Мордухай-Болтовского — обобщение теоремы Лиувилля (см. теорему 3 предыдущего параграфа) на линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка.

§4 Топологические препятствия представимости функций в квадратурах

Существует третий подход к проблеме представимости функций в квадратурах (см. [4]-[10]). Мы рассматриваем функции, представимые в квадратурах, как многозначные аналитические функции одного комплексного переменного. Оказывается, что существуют топологические ограничения на характер расположения над комплексной плоскостью римановой поверхности функции, представимой в квадратурах. Если функция не удовлетворяет этим ограничениям, то ее нельзя выразить в квадратурах.

Этот подход кроме геометрической наглядности имеет следующее преимущество. Топологические запреты относятся к характеру многозначности функции.

Они сохраняются не только для функций, представимых в квадратурах, но и для значительно более широкого класса функций. Этот более широкий класс получится, если к функциям, представимым в квадратурах, добавить все мероморфные функции и разрешить им участвовать во всех формулах. Из-за этого топологические результаты о непредставимости в квадратурах оказываются более сильными, чем алгебраические. Дело в том, что суперпозиция функций — не алгебраическая операция. В дифференциальной алгебре вместо суперпозиции функций рассматривается дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Но, например, Г-функция Эйлера не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению. Поэтому безнадежно искать уравнение, которому удовлетворяет, скажем, функция $\Gamma(\exp x)$. Единственные известные результаты о непредставимости функций в квадратурах и, скажем, в Г-функциях Эйлера получены только нашим методом.

С другой стороны, этим методом невозможно доказать непредставимость в квадратурах какой-либо однозначной мероморфной функции.

Используя дифференциальную теорию Галуа (а точнее, ее линейно-алгебраическую часть, имеющую дело с алгебраическими матричными группами и их дифференциальными инвариантами), можно показать, что единственные причины неразрешимости в квадратурах линейных дифференциальных уравнений типа Фукса топологические (ср. §11). Другими словами, если к разрешимости в квадратурах дифференциального уравнения типа Фукса не существует топологических препятствий, то оно решается в квадратурах.

Существуют следующие топологические препятствия к представимости функций в квадратурах, обобщенных квадратурах.

Во-первых, функции, представимые в обобщенных квадратурах, и, в частности, функции, представимые в квадратурах могут иметь не более чем счетное число особых точек на комплексной плоскости (см. §5). (Хотя уже для простейших функций, представимых в квадратурах, множество особых точек может быть всюду плотным!)

Во-вторых, группа монодромии функции, представимой в квадратурах, обязательно разрешима (см. §7). (Хотя уже для простейших функций, представимых в квадратурах, группа монодромии может содержать континуум элементов!)

Аналогичные ограничения на расположение римановой поверхности существуют и для функций, представимых в обобщенных квадратурах. Однако эти ограничения формулируются сложнее. В них группа монодромии фигурирует не как абстрактная группа, а как группа перестановок множества листов функции. Или, другими словами, в этих ограничениях фигурирует не только группа монодромии, но и *монодромная пара* функции, состоящая из ее группы монодромии и стационарной подгруппы некоторого ростка (см. §9).

Переходим к более подробному описанию этого геометрического подхода к проблеме разрешимости.

§5 S-функции

Определим класс функций, внутри которого будут проводиться дальнейшие рассмотрения. Многозначная аналитическая функция одного комплексного переменного называется *S-функцией*, если множество ее особых точек не более чем счетно. Уточним это определение.

Два регулярных ростка f_a и g_b, заданных в точках a и b сферы Римана S^2, называются эквивалентными, если росток g_b получается из ростка f_a регулярным продолжением вдоль некоторой кривой. Каждый росток g_b, эквивалентный ростку f_a, называется также регулярным ростком многозначной аналитической функции f, порожденной ростком f_a.

Точка $b \in S^2$ называется особой для ростка f_a, если существует кривая $\gamma\colon [0,1] \to S^2$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, такая, что росток не может быть регулярно продолжен вдоль этой кривой, но для любого t, $0 \le t < 1$, росток регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma\colon [0,t] \to S^2$. Легко видеть, что у эквивалентных ростков множества особых точек совпадают.

Регулярный росток называется S-ростком, если множество его особых точек не более чем счетно. Многозначная аналитическая функция называется S-функцией, если каждый ее регулярный росток является S-ростком.

Справедлива следующая теорема.

Теорема о замкнутости класса S-функций ([6],[8],10]). *Класс S всех S-функций замкнут относительно следующих операций:*

1) *операции дифференцирования, т.е. если $f \in S$, то $f' \in S$;*
2) *операции интегрирования, т.е. если $f \in S$, то $\int f(x)dx \in S$;*
3) *суперпозиции, т.е. если g, $f \in S$, то $g \circ f \in S$;*
4) *мероморфных операций, т.е. если $f_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, $F(x_1, \dots, x_n)$ — мероморфная функция n-переменных и $f = F(f_1, \dots, f_n)$, то $f \in S$;**
5) *решения алгебраических уравнений, т.е. если $f_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, и $f^n + f_1 f^{n-1} + \dots + f_n = 0$, то $f \in S$;*
6) *решения линейных дифференциальных уравнений, т.е. если $f_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, и $f^{(n)} + f_1 f^{(n-1)} + \dots + f_n = 0$, то $f \in S$.*

Следствие. *Если многозначную функцию $f(x)$ можно получить из однозначных S-функций с помощью интегрирования, дифференцирования, мероморфных операций, суперпозиций, решения алгебраических уравнений и линейных дифференциальных уравнений, то функция $f(x)$ имеет не более чем счетное число особых точек. В частности, функцию, имеющую несчетное число особых точек, нельзя представить в обобщенных квадратурах.*

---

*Подробнее. *Мероморфная операция*, определенная мероморфной функцией $F(x_1, \dots, x_n)$, сопоставляет функциям $f_1, \dots, f_n$ новую функцию $F(f_1, \dots, f_n)$. Арифметические операции и потенцирование являются примерами мероморфных операций, соответствующих функциям $F_1(x, y) = x + y$, $F_2(x, y) = x \cdot y$, $F_3(x, y) = x/y$ и $F_4(x) = \exp x$.

§6 Группа монодромии

Группа монодромии S-функции f с множеством особых точек A — это группа всех перестановок листов функции f, которые происходят при обходе точек множества A. Подробнее.

Пусть F_a — множество всех ростков S-функции f в точке a, не лежащей в множестве ее особых точек A. Возьмем замкнутую кривую γ в $S^2 \setminus A$ с началом в точке a. Продолжение каждого ростка из множества F_a вдоль кривой γ приводит к ростку из множества F_a.

Итак, каждой кривой γ соответствует отображение множества F_a в себя, причем гомотопным в $S^2 \setminus A$ кривым отвечают одинаковые отображения. Произведению кривых отвечает произведение отображений. Возникает гомоморфизм τ фундаментальной группы множества $S^2 \setminus A$ в группу $S(F_a)$ взаимнооднозначных преобразований множества F_a. Группой монодромии S-функции f называется образ фундаментальной группы $\pi_1(S^2 \setminus A, a)$ в группе $S(F_a)$ при гомоморфизме τ.

Продемонстрируем эффекты, которые нужно иметь в виду при изучении квадратурных функций как функций комплексного переменного.

Пример. Рассмотрим функцию $w(z) = \ln(1 - z^\alpha)$, где $\alpha > 0$ — иррациональное число. Функция $w(z)$ — элементарная функция, заданная простейшей формулой. Тем не менее ее риманова поверхность весьма сложно расположена над комплексной плоскостью. Множество A особых точек этой функции состоит из точек $0, \infty$ и точек логарифмического ветвления $a_k = e^{\frac{1}{\alpha} 2k\pi i}$, где k — любое целое число. Так как α иррационально, точки a_k будут всюду плотно расположены на единичной окружности. Несложно показать, что фундаментальная группа $\pi_1(S^2 \setminus A)$ и группа A-монодромии функции $w(z)$ будут континуальны. Можно показать также, что образ фундаментальной группы $\pi_1(S^2 \setminus \{A \cup b\})$ дополнения до множества $A \cup b$, где $b \neq a_k$ — любая точка на единичной окружности, при гомоморфизме τ является собственной подгруппой группы монодромии функции $w(z)$.

§7 Препятствия к представимости функций в квадратурах

Справедлива следующая

Теорема ([6],[8],[10]). *Класс всех S-функций, имеющих разрешимую группу монодромии, замкнут относительно суперпозиций, мероморфных операций, операций дифференцирования и интегрирования.*

В качестве следствия получаем следующий

Результат о квадратурах. *Группа монодромии функции f, представимой в квадратурах, разрешима. Более того, разрешима группа монодромии всякой функции f, представимой через однозначные S-функции при помощи суперпозиций, мероморфных операций, операций дифференцирования и интегрирования.*

Остановимся на применении этого результата к алгебре.

§8 Разрешимость алгебраических уравнений

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1(x)y^{n-1} + \cdots + r_n(x) = 0, \tag{1}$$

в котором $r_i(x)$ — рациональные функции.

В окрестности неособой точки x_0 существуют все решения $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (1). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, полученное присоединением к полю рациональных функций $\mathcal{R}$ всех решений y_i.

Рассмотрим автоморфизм σ поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, который оставляет неподвижными все элементы поля $\mathcal{R}$. Совокупность всех таких автоморфизмов образует группу, которая называется группой Галуа уравнения (1). Каждый автоморфизм σ из группы Галуа переводит решение уравнения в решение уравнения, поэтому ему отвечает перестановка S_σ решений. Автоморфизм σ вполне определяется перестановкой S_σ, так как поле $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ порождается функциями y_i. Вообще говоря, не каждая перестановка решений может быть продолжена до автоморфизма σ из группы Галуа. Дело в том, что автоморфизмы σ обязаны сохранять все соотношения, существующие между решениями.

Итак, группа Галуа уравнения — это группа перестановок решений, сохраняющих все соотношения между решениями.

Каждая перестановка S_γ множества решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Действительно, вместе с функсиями $y_1, \ldots, y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Итак, группа монодромии уравнения лежит в группе Галуа. На самом деле, группа Галуа совпадает с группой монодромии. Действительно, неподвижные относительно действия монодромии функции из поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$ будут однозначными функциями. Эти функции к тому же являются алгебраическими, а всякая однозначная алгебраическая функция рациональна. Поэтому группа монодромии и группа Галуа имеют одинаковое поле инвариантов, и следовательно, они согласно теории Галуа совпадают.

Согласно теории Галуа уравнение (1) решается в радикалах над полем ратсиональных функций, если и только если его группа Галуа над этим полем разрешима. Другими словами, теория Галуа доказывает следующее.

а) *Алгебраическая функция $y(x)$, у которой группа монодромии разрешима, представима в радикалах.*

б) *Алгебраическая функция $y(x)$, у которой группа монодромии не разрешима, не представима в радикалах.*

Наша теорема позволяет усилить отрицательный результат б). *Алгебраическая функция $y(x)$ не выражается через однозначные S-функции с помощью мероморфных*

операций, суперпозиций, интегрирования и дифференцирования. Если алгебраическое уравение не решается в радикалах, то его нельзя решить и используя логарифмы, а также экспоненты и другие мероморфные функции на комплексной плоскости.

§9 Монодромная пара

Группа монодромии — это не только абстрактная группа, но группа транзитивных перестановок листов функции. Алгебраически такой объект задается парой групп: группой перестановок и ее подгруппой, являющейся стационарной подгруупой некоторого элемента.

Монодоромной парой S-функции называется пара групп, состоящая из группы монодромии этой функции и стационарной подгруппы некоторого листа этой функции. Монодромная пара определена корректно, т.е. с точностью до изоморфизма пар групп не зависит от выбора листа функции.

Нам понадобится следующее определение. Пара групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ называется *почти разрешимой парой групп*, если существует цепочка подгрупп

$$\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \dots \Gamma_m \supseteq \Gamma_0$$

такая, что для каждого $i, 1 \leq i \leq m-1$ группа Γ_{i+1} является нормальным делителем группы Γ_i и фактор-группа Γ_i/Γ_{i+1} либо коммутативна, либо конечна.

Любую группу Γ можно рассматривать как пару групп $[\Gamma, e]$, где e — единичная подгруппа. Будем говорить, что группа Γ разрешима, если почти разрешима пара групп $[\Gamma, e]$.

Теорема ([6],[8],[10]). *Класс всех S-функций, имеющих почти разрешимую монодромную пару, замкнут относительно суперпозиций, мероморфных операций, операций дифференцирования, интегрирования и решения алгебраических уравнений.*

В качестве следствия получаем следующий

Результат об обобщенных квадратурах. *Монодромная пара функции f, представимой в обобщенных квадратурах, почти разрешима. Более того, почти разрешима монодромная пара всякой функции f, представимой через однозначные S-функции при помощи суперпозиций, мероморфных операций, дифференцирования, интегрирования и решения алгебраических уравнений.*

Приведем теперь примеры функций, не представимых в обобщенных квадратурах. Пусть риманова поверхность функции f является универсальной накрывающей над областью $S^2 \setminus A$, где S^2 — сфера Римана и A — конечное множество, содержащее не меньше трех точек. Тогда *функция f не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.* Действительно, монодромная пара такой функции состоит из свободной некоммутативной группы и ее единичной подгруппы. Легко видеть, что такая пара групп не является почти разрешимой.

Пример 1. Рассмотрим функцию $z(w)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость на треугольник с нулевыми углами, ограниченный дугами окружностей. Функция $z(w)$ обратна к модулярной функции Пикара. Риманова поверхность функции $z(w)$ является универсальной накрывающей над сферой без трех точек, поэтому функция $z(w)$ не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.

Отметим, что функция $z(w)$ тесно связана с эллиптическими интегралами

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ и } K'(k) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Каждые две из функций $K(k)$, $K'(k)$ и $z(w)$ взаимно выражаются друг через друга при помощи квадратур. Поэтому каждый из интегралов $K(k)$ и $K'(k)$ не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.

В следующем параграфе мы обобщим пример 1 и перечислим все многоугольники, ограниченные дугами окружностей, на которые можно отобразить верхнюю полуплоскость функцией, представимой в обобщенных квадратурах.

§10 Отображение полуплоскости на многоугольник, ограниченный дугами окружностей

10.1. Применение принципа симметрии. Рассмотрим на комплексной плоскости многоугольник G, ограниченный дугами окружностей. Согласно теореме Римана существует функция f_G, отображающая верхнюю полуплоскость на многоугольник G. Это отображение изучалось Риманом, Шварцем, Кристоффелем, Клейном и другими (см., например [11]). Напомним нужные нам классические результаты.

Обозначим через $B = \{b_j\}$ прообраз множества вершин многоугольника G при отображении f_G, через $H(G)$ — группу конформных преобразований сферы, порожденную инверсиями относительно сторон многоугольника, и через $L(G)$ — подгруппу индекса 2 группы $H(G)$, состоящую из дробно-линейных преобразований. Из принципа симметрии Римана-Шварца вытекает следующее утверждение.

Утверждение.

1) *Функция f_G мероморфно продолжается вдоль всех кривых, не пересекающих множество B.*
2) *Все ростки многозначной функции f_G в неособой точке $a \notin B$ получаются применением к фиксированному ростку f_a группы дробно-линейных преобразований $L(G)$.*
3) *Группа монодромии функции f_G изоморфна группе $L(G)$.*
4) *Около точек b_j функция f_G имеет особенности следующего вида. Если в вершине a_j многоугольника G, соответствующей точке b_j, угол равен $\alpha_j \neq 0$, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z) = (z-b_j)^{\beta_j}\varphi(z)$, где $\beta_j =$*

$\alpha_j/2\pi$, а функция $\varphi(z)$ голоморфна около точки b_j. Если же угол $\alpha_j = 0$, то функция f_G дробно-линейным преобразованием приводится к виду $f_G(z) = \ln(z) + \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна около b_j.

Из наших результатов вытекает, что если функция f_G представима в обобщенных квадратурах, то группа $L(G)$ и вместе с ней группа $H(G)$ почти разрешимы.

10.2.Почти разрешимые группы дробно-линейных и конформных преобразований. Пусть π — эпиморфизм группы $SL(2)$ матриц 2-го порядка с определителем 1 в группу дробно-линейных преобразований L,

$$\pi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как $\ker\pi = \mathbb{Z}_2$, группа $\tilde{L} \subseteq L$ и группа $\pi^{-1}(\tilde{L}) = \Gamma \subseteq SL(2)$ почти разрешимы одновременно. Группа Γ — матричная группа, поэтому группа Γ *почти разрешима, если и толь ко если она обладает нормальным делителем Γ_0 конечного индекса, приводящимся к треугольному виду.* (Этот вариант теоремы Ли верен и в многомерном пространстве и играет важную роль в дифференциальной теории Галуа.) Группа Γ_0 состоит из матриц второго порядка, поэтому группа Γ_0 приводится к треугольному виду в одном из следующих трех случаев:

1) группа Γ_0 имеет единственное собственное одномерное подпространство;
2) группа Γ_0 имеет два собственных одномерных подпространства;
3) группа Γ_0 имеет двумерное собственное пространство.

Перейдем теперь к группе дробно-линейных преобразований $\tilde{L} = \pi(\Gamma)$. Группа $\tilde{L}$ дробно-линейных преобразований почти разрешима, если и только если она обладает нормальным делителем $L_0 = \pi(\Gamma_0)$ конечного индекса, множество неподвижных точек которого состоит из одной точки, или из двух, или из всей сферы Римана.

Группа конформных преобразований $\tilde{H}$ обладает подгруппой $\tilde{L}$ индекса 2 (или индекса 1), состоящей из дробно-линейных преобразований. Поэтому для почти разрешимой группы конформных преобразований $\tilde{H}$ справедливо аналогичное утверждение.

Лемма. *Группа конформных преобразований сферы почти разрешима, если и только если выполнено хотя бы одно из трех условий:*

1) группа имеет неподвижную точку;
2) группа имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек;
3) группа конечна.

Лемма вытекает из предыдущего, т. к. множество неподвижных точек нормального делителя инвариантно относитель но действия группы. Хорошо известно, что *конечная группа $\tilde{L}$ дробно-линейных преобразований сферы дробно-линейной заменой координаты приводится к группе вращений.*

Несложно показать, что если произведению инверсии относительно двух разных окружностей при стереографической проекции соответствует вращение сферы, то этим окружностям соответствуют большие круги. Поэтому каждая *конечная группа $\tilde{H}$ конформных преобразований, порожденная инверсиями относительно окружностей, дробно-линейной заменой координаты приводится к группе движений сферы, порожденной отражениями.*

Хорошо известны все конечные группы движений, порожденные отражениями. Каждая такая группа есть группа движений одного из следующих тел:

1) правильной n-угольной пирамиды;
2) n-угольного диэдра, или тела, образованного двумя равными правильными n-угольными пирамидами, склееными по общему основанию;
3) тетраэдра;
4) куба или октаэдра;
5) додекаэдра или икосаэдра.

Все эти группы движений, за исключением группы додекаэдра-икосаэдра, разрешимы. На сфере, центр которой совпадает с центром тяжести тела, плоскости симметрии тела высекают некоторую сетку больших кругов. Сетки, соответствующие перечисленным телам, будем называть конечными сетками больших кругов. Стереографические проекции конечных сеток изображены на рис. 1–5.

10.3. Интегрируемые случаи. Вернемся к вопросу о представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Рассмотрим возникающие случаи и покажем, что найденное условие на группу монодромии не только необходимы, но и достаточны для представимости функции f_G в обобщенных квадратурах.

Первый случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет неподвижную точку. Это означает, что продолжения сторон многоугольника G пересекаются в одной точке. Переводя эту точку дробно-линейным преобразованием в бесконечность, получим многоугольник $\overline{G}$, ограниченный отрезками прямых.

Все преобразования группы $L(\overline{G})$ имеют вид $z \to az + b$. Все ростки функции $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ в неособой точке c получаются применением к фиксированному ростку $\overline{f}_c$ группы $L(\overline{G})$, $\overline{f}_c \to a\overline{f}_c + b$. Росток $R_c = \overline{f}_c''/\overline{f}_c'$ инвариантен при действии группы $L(\overline{G})$. Значит, росток R_c есть росток однозначной функции. Особые точки b_j функции R_c могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 10.1). Поэтому функция R_c рациональна. Уравнение $\overline{f}''/\overline{f}' = R$ интегрируется в квадратурах. Этот случай интегрируемости хорошо известен. Функция $\overline{f}$ в этом случае называется интегралом Кристоффеля-Шварца.

Второй случай интегрируемости. Группа $H(G)$ имеет инвариантное множество, состоящее из двух точек. Это означает существование таких двух точек, что для каждой стороны многоугольника G точки или инверсионны относительно стороны, или лежат на ее продолжении. Переведем эти точки дробно-линейным преобразованием в ноль и в бесконечность. Мы получим многоугольник $\overline{G}$, ограниченный

Рис. 1. Первый случай интегрируемости

дугами окружностей с центрами в точке 0 и отрезками лучей, выходящих из точки 0 (см. рис. 2). Все преобразования группы $L(\overline{G})$ имеют вид $z \to az$, $z \to \frac{b}{z}$. Все ростки функции $\overline{f} = f_{\overline{G}}$ в неособой точке c получается применением к фиксированному ростку $\overline{f}_c$ преобразований группы $L(\overline{G})$

$$\overline{f}_c \to a\overline{f}_c,\ \overline{f}_c \to b/\overline{f}_c.$$

Росток $R_c = (\overline{f}'_c/\overline{f}_c)^2$ инвариантен при действии группы $L(\overline{G})$ и является ростком однозначной функции R. Особенности функции R могут быть лишь полюсами (см. утверждение из п. 10.1), поэтому функция R рациональна. Уравнение $R = (\overline{f}'/\overline{f})^2$ интегрируется в квадратурах.

Рис. 2. Второй случай интегрируемости

Третий случай интегрируемости. Группа $H(G)$ конечна. Это означает, что многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводятся в многоугольник $\overline{G}$, стороны которого лежат на некоторой конечной сетке больших кругов. Группа $L(G)$ конечна, и, следовательно, функция f_G конечнозначна. Так как все особенности функции f_G степенного типа (см. утверждение из п. 10.1), то функция f_G есть алгебраическая функция.

Остановимся на случае конечной разрешимой группы $H(G)$. Такой случай представляется, если и только если многоугольник G дробно-линейным преобразованием переводится в многоугольник $\overline{G}$, стороны которого лежат на конечной сетке, отличной от сетки додекаэдра-икосаэдра. В этом случае группа $L(G)$ разрешима, и функция f_G представляется через рациональные функции при помощи арифметических операций и радикалов (см. §8).

Из наших результатов вытекает

Теорема о многоугольниках, ограниченных дугами окружностей ([6],[8],[10]). *Для любого многоугольника G, не содержащегося в перечисленных выше трех случаях интегрируемости, функция f_G не только не представима в обобщенных квадратурах, но и не выражается через однозначные S-функции при помощи обобщенных квадратур, суперпозиций и мероморфных операций.*

§11 Тополгические препятствия к разрешимости линейных дифференциальных уравнений.

11.1. Группа монодромии линейного дифференциального уравнения, ее связь с группой Галуа. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + r_1(x_1)y^{(n-1)} + \cdots + r_n(x)y = 0, \tag{1}$$

где $r_i(x)$ — рациональные функции. Полюса рациональных функций $r_i(x)$ и точка ∞ называются особыми точками уравнения (1).

В окрестности неособой точки x_0 решения уравнения образуют n-мерное пространство V^n. Возьмем теперь произвольную кривую $\gamma(t)$ на комплексной плоскости, ведущую из точки x_0 в точку x_1 и не проходящую через особые точки a_i. Решения уравнения будут аналитически продолжаться вдоль кривой, оставаясь при этом решениями уравнения. Поэтому каждой кривой γ отвечает линейное отображение M_γ пространства решений $V^n_{x_0}$ в точке x_0 в пространство решений $V^n_{x_1}$ в точке x_1.

Если пошевелить кривую γ, не задевая при этом особых точек и оставляя закрепленными концы, то отображение M_γ меняться не будет. Замкнутым кривым будет отвечать линейное преобразование пространства V^n в себя. Совокупность всех таких линейных преобразований пространства V^n образует группу, которая и называется *группой монодромии уравнения* (1). Итак, группа монодромии уравнения — это группа линейных преобразований решений, которые возникают при обходе особых точек. Группа монодромии уравнения характеризует многозначность его решений.

В окрестности неособой точки x_0 существуют n линейно независимых решения $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (1). В этой окрестности можно рассмотреть поле функций $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, полученное присоединением к полю рациональ ных функций $\mathcal{R}$ всех решений y_i и всех их производных.

Рис. 3. Третий случай интегрируемости

Каждое преобразование M_γ пространства решений из группы монодромии можно продолжить до автоморфизма всего поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Действительно, вместе с функциями $y_1, \ldots, y_n$ вдоль кривой γ будет мероморфно продолжаться каждый элемент поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Это продолжение и дает требуемый автоморфизм, так как при продолжении сохраняются арифметические операции и дифференцирование, а рациональные функции возвращаются к своему прежнему значению из-за однозначности.

Итак, *группа монодромии уравнения лежит в группе Галуа.*

Поле инвариантов группы монодромии — это подполе поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, состоящее из однозначных функций. В отличии от алгебраических уравнений для диф-

ференциальных уравнений поле инвариантов относительно действия группы монодромии может быть больше чем поле рациональных функций.

Например, для дифференциального уравнения (1), у которого все коэффициенты $r_i(x)$ являются полиномами, все решения однозначны. Но, конечно, решения таких уравнений далеко не всегда полиномиальны. Дело здесь в том, что решения дифференциальных уравнений могут расти при подходе к особым точкам экспоненциальным образом. Известен широкий класс линейных дифференциальных уравнений, для которых такого осложнения нет, т.е. для которых решения при подходе к каждой особой точке растут не быстрее чем степенным образом. Дифференциальные уравнения, обладающие этим свойством, называются дифференциальными уравнениями типа Фукса.

Для дифференциальных уравнений типа Фукса справедлива следующая теорема Фробениуса.

Теорема. *Подполе дифференциального поля $\mathcal{R}\{y_1, \ldots, y_n\}$, состоящее из однозначных функций, для дифференциальных уравнений типа Фукса совпадает с полем рациональных функций.*

Согласно дифференциальной теории Галуа из теоремы Фробениуса вытекает, что алгебраическое замыкание группы монодромии M (т.е. наименьшая алгебраическая группа, содержащая M) совпадает с ее группой Галуа.

Дифференциальная теория Галуа поэтому дает следующие критерии разрешимости дифференциальных уравнений типа Фукса.

Теорема. *Дифференциальное уравнение типа Фукса решается в квадратурах и в обобщенных квадратурах, если его группа монодромии, соответственно, разрешима и почти разрешима.*

Дифференциальная теория Галуа доказывает тем самым два результата.

1) *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса разрешима (почти разрешима), то это уравнение решается в квадратурах (в обобщенных квадратурах).*
2) *Если группа монодромии дифференциального уравнения типа Фукса неразрешима (не почти разрешима), то это уравнение не решается в квадратурах (в обобщенных квадратурах).*

Наша теорема позволяет усилить отрицательный результат 2). Действительно, легко видеть, что для почти каждого решения дифференциального уравнения (1) его монодромная пара есть $[M, e]$, где M — группа монодромии уравнения, а e — ее тривиальная подгруппа. Поэтому справедлива следующая

Теорема ([6],[8]). *Если группа монодромии линейного дифференциального уравнения (1) неразрешима (не почти разрешима), то почти каждое решение этого уравнения нельзя выразить через однозначные S-функции при помощи суперпозиций, мероморфных*

операций, интегрирований и дифференцирований (при помощи суперпозиций, мероморфных операций, интегрирований, дифференцирований и решения алгебраических уравнений).

Приведем пример применения этих результатов.

11.2. Системы Фуксовых дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений типа Фукса, т.е. систему вида

$$y' = A(x)y, \tag{2}$$

где $y = y_1, \dots, y_n$, а $A(x)$ — $n \times n$ матрица, состоящая из рациональных функций и имеющая следующий вид:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x - a_i},$$

где A_i — постоянные матрицы.

Если матрицы A_i одновременно приводятся к треугольному виду, то система (2) решается в квадратурах как и всякая треугольная система. Разумеется, встречаются разрешимые не треугольные системы. Однако, если матрица A_i достаточно мала, таких систем нет. Именно, справедлива следующая

Теорема ([9]). *Нетреугольная система (2) с достаточно малыми матрицами A_i, $\|A_i\| < \varepsilon(a_1, \dots, a_k, n)$ сильно неразрешима, т.е. ее нельзя разрешить даже если использовать все однозначные S-функции, суперпозиции, мероморфные операции, интегрирование, дифференцирование и решение алгебраических уравнений.*

§12 Алгебраические функции нескольких переменных

В настоящей статье мы имеем дело с функциями одной переменной. Здесь мы сделаем два замечания о функциях нескольких переменных.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^n + r_1(x_1, \dots, x_k)y^{n-1} + \dots + r_n(x_1, \dots, x_k) = 0, \tag{1}$$

в котором $r_i(x_1, \dots, x_k)$ — рациональные функции от k переменных.

1) Согласно теории Галуа уравнение (1) с разрешимой группой монодромии решается в радикалах. *Если же группа монодромии уравнения (1) неразрешима, то его не только нельзя решить в радикалах, но оно не решается и с использованием элементарных функций, целых функций многих переменных, арифметических операций и суперпозиций.* Доказательство этого многомерного факта почти не отличается от доказательства соответствующего одномерного результата.

2) Уравнение (1) определяет алгебраическую функцию от k переменных. Когда можно алгебраическую функцию от k переменных представить через алгебраические функции меньшего числа переменных, используя суперпозиции и арифметические операции? Этот вопрос составляет содержание тринадцатой проблеммы Гильберта. Несмотря на замечательные достижения в этой области [12], до сих пор не доказано, что существуют алгебраические функции нескольких переменных, непредставимые через алгебраические функции одной переменной.

Известна, однако, следующая

Теорема ([4],[5]). *Целая алгебраическая функция у двух переменных (a, b), определенная равенством*

$$y^5 + ay + b = 0,$$

не выражается через целые алгебраические функции одной переменной при помощи суперпозиций, сложений и умножений.

Дело здесь в следующем. С каждой особой точкой a алгебраической функции (1) можно связать *локальную группу монодромии*, т.е. группу перестановок листов, которые получаются при обходах множества особенностей функции вдоль кривых, лежащих в как угодно малой окрестности точки a. Для алгебраических функций одной переменной такая локальная группа монодромии является коммутативной. Поэтому локальная группа монодромии алгебраической функции, выражающаяся через целые алгебраические функции одной переменной при помощи сложений и умножений *должна быть разрешимой*. А локальная группа монодромии функции

$$y^5 + ay + b = 0$$

около точки $(0, 0)$ является неразрешимой группой $S(5)$ всех перестановок пяти элементов. Это и объясняет сформулированную теорему.

Отметим, что использование операции деления абсолютно разрушает приведенные аргументы. Действительно, деление — разрывная операция, и ее применение нарушает локальность. Кстати, функция

$$y^5 + ay + b = 0$$

выражается с помощью деления через функцию одной переменной $g(x)$, определенную равенством

$$g^5 + g + x = 0,$$

и через функцию одной переменной $f(a) = \sqrt[4]{a}$. Несложно видеть, что

$$y(a, b) = g(b/\sqrt[4]{a^5})\sqrt[4]{a}.$$

Замечание. Доказательство последней теоремы составляет содержание курсовой работы, выполненной мною в 1968 году. Позже я узнал, что мой научный руководитель В.И. Арнольд не только знал, как решать поставленную задачу, но даже читал лекции на близкую тему в Колмогоровском интернате. По материалам его лекций позднее была написана книга [13].

References

1. J. Ritt, *Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods*, N. Y. Columbia Univ. Press. (1948).
2. *Капланский И.*, Введение в дифференциальную алгебру., М.: Мир, 1959.
3. M.F. Singer, *Formal solutions of differential equations*, J. Symbolic computation **10** (1990), 59–94.
4. A. Khovanskii, *The representability of algebroidal functions as compositions of analytical functions and one-variable algebroidal functions*, Functional Analysis and its applications **4** (1970), no. 2, 74–79.
5. A. Khovanskii, *On compositions of analytical functions with radicals*, Uspehi Matem. Nauk **26** (1971), no. 2, 213–214.
6. A. Khovanskii, *On representability of functions by quadratures*, Uspehi Matem. Nauk **26** (1971), no. 4, 251–252.
7. A. Khovanskii, *Riemann surfaces of functions, representable by quadratures*, Reports of VI All-Union Topological Conference, Tbilisi (1972).
8. A. Khovanskii, *The representability of function by quadratures, PhD, Moscow,* (1973), 1–76.
9. A. Khovanskii and Yu.Ilyashenko, *Galois theory of systems of Fuchs-type differential equations with small coefficients*, Preprint IPM (1974), no. 117.
10. A. Khovanskii, *Topological obstructions for representability of functions by quadratures*, Journal of dynamical and control systems **1** (1995), no. 1, 99–132.
11. F. Klein, *Vorlesugen uber die hypergeometriche funktion*, Berlin (1933).
12. V. Lin.
13. V. Alekseev, Теорема Абеля в задачах и решениях.